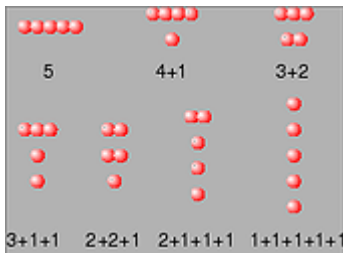


Partitiegetallen gedragen zich als fractals

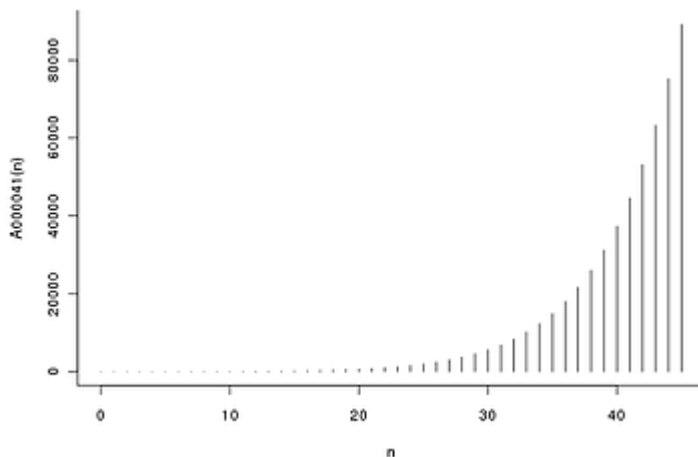
Overgenomen van Blog door Ratsereel d.d. 27 januari 2011



Partitiegetallen gedragen zich als fractals

Al eeuwenlang proberen de knapste wiskundekoppen grip te krijgen op de zogeheten *partitiefunctie*. Deze functie geeft aan op hoeveel manieren een aantal knikkers kan worden opgedeeld in groepjes. Zo kun je 5 knikkers bijvoorbeeld verdelen in vier groepjes: één groepje van 2 en drie groepjes van 1. Als som kun je dit schrijven als $5 = 2 + 1 + 1 + 1$. Een andere partitie is $5 = 3 + 2$ (twee groepjes). Ook $5 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1$ (vijf groepjes) en $5 = 5$ (één groepje) zijn partities. In totaal zijn er 7 partities van 5; je ziet ze in de figuur hiernaast. We noteren dat als $p(5) = 7$.

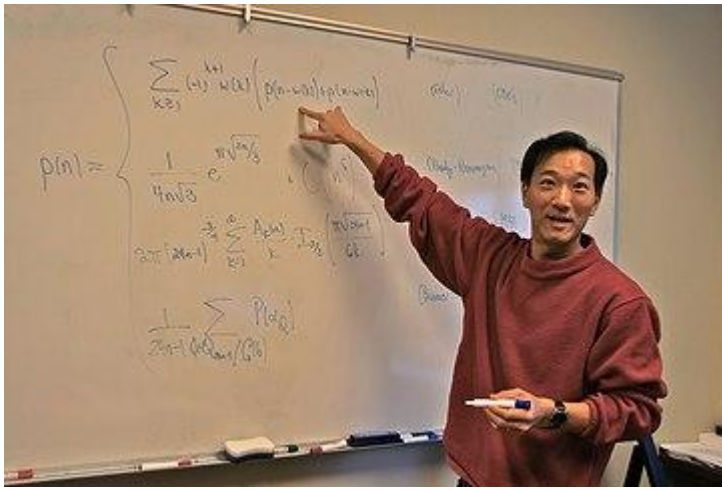
In het algemeen geven we het aantal partities van n aan met $p(n)$. De rij *partitiegetallen* is de rij $p(1)$, $p(2)$, $p(3)$, $p(4)$, $p(5)$ enzovoorts. Die rij ziet er zo uit: **1, 2, 3, 5, 7, 11, 15, 22, ...** De getallen in die rij worden al snel ongelofelijk groot, zoals figuur 2 laat zien. Zo is $p(20) = 627$ en $p(100)$ is al meer dan 190 miljoen.



De waarden van $p(n)$ nemen snel toe. Afbeelding: © OEIS

Grote namen als **Euler** en **Ramanujan** hebben diepe inzichten verkregen in de theorie van partities. Hoewel zij met hun berekeningen veel vragen konden beantwoorden, riepen hun berekeningen uiteindelijk nog meer vragen op, waarop zij het antwoord schuldig moesten blijven.

Wiskundige Ken Ono heeft met een aantal collega's nieuwe grote vorderingen gemaakt op het gebied van partities. Het team onder leiding van Ono wist te bewijzen dat de partitiegetallen zich in zekere zin gedragen als *fractals*, een resultaat dat niemand eerder voor mogelijk had gehouden. Zij hebben deelbaarheidseigenschappen van partities ontrafeld en een theorie ontwikkeld die de 'oneindig herhalende' structuur verklaart. Bovendien hebben ze de eerste *eindige* formule opgesteld om partitiegetallen te berekenen. "Adembenemende doorbraken", noemt George Andrews, professor aan de Pennsylvania State University en voorzitter van de American Mathematical Society, de resultaten.



Ken Ono geeft een voordracht over partitiegetallen. Afbeelding: © [esciencecommons](#)

“We hebben bewezen dat partitiegetallen een ‘fractale structuur’ hebben voor elk priemgetal. Deze getallen zijn ‘zelfherhalend’ *in a shocking way*”, aldus Ono. “Met onze methode hebben we een antwoord gevonden op diverse vragen die tot nu toe nog open stonden.” Ongetwijfeld zullen de nieuwe resultaten leiden tot veranderingen in hoe wiskundigen partities bestuderen.

Ono, professor aan zowel Emory en de universiteit van Wisconsin in Madison, leidde een team bestaande uit Jan Bruinier van de Technische Universiteit van Darmstadt in Duitsland, Amanda Folsom van Yale University, en Zach Kent, *fellow* aan Emory.



Leonhard Euler (1707–1783).

Geschiedenis

Het werk van de achttiende eeuwse wiskundige Leonhard Euler leidde tot de eerste recursieve techniek voor het berekenen van partitiegetallen. De methode was echter langzaam en, in een tijd zonder computers, onpraktisch voor grote aantallen. Honderdvijftig jaar lang kon de methode alleen toegepast worden om de eerste 200 partitiegetallen te berekenen.

In het begin van de twintigste eeuw werden nieuwe resultaten geboekt door de wiskundigen Srinivasa Ramanujan en G.H. Hardy. Met hun methode, de *cirkelmethode*, konden grotere partitiegetallen uitgerekend worden. Zij moesten echter genoegen nemen met een benadering. Het lukte hen niet om een formule te vinden die het *exacte* aantal partities van een groot getal kan berekenen.

In een van zijn [notebooks](#) schreef Ramanujan in 1919: “Schijnbaar zijn er overeenkomstige eigenschappen waarin de moduli van partitiegetallen machten van een van de priemgetallen 5, 7 of 11 zijn... En die eigenschappen zijn er niet voor andere priemgetallen.” Een jaar later overleed Ramanujan, en de wiskundewereld bleef zitten met een boel ondoordringelijke aantekeningen, waaronder deze.

In 1937 werd een nieuwe grote stap voorwaarts gezet. In dat jaar vond Hans Rademacher een exacte formule om partitiegetallen te berekenen. Hoewel de methode een grote verbetering was ten opzichte van de exacte, maar trage formule van Euler, had ook deze formule zo zijn beperkingen: er moesten oneindig veel getallen met oneindig veel decimalen bij elkaar opgeteld worden. Een klus waarvan niemand vrolijk werd.



Al wandelend door het bos kregen Ken Ono (links) en Zach Kent hun eerste eureka-moment. Afbeelding: © [esciencecommons](#)

Eureka in het bos

In de daaropvolgende decennia werden opnieuw diepe inzichten verkregen, maar die staan nu alle in de schaduw van de doorbraak van Ono en zijn collega's. Maandenlang heeft het team van Ono eraan gewerkt. "Alles wat we probeerden, bleek niet te werken", aldus Ono. Een *eureka moment* kwam in september vorig jaar. Ono en Kent wandelden door de bossen van Tallulah Falls in de Amerikaanse staat Georgia. "We stonden op een grote rots, keken uit over de vallei en hoorden de waterval, toen we ons realiseerden dat partitiegetallen een fractale structuur hebben", zegt Ono. "Allebei begonnen we te lachen."



Ono en Kent keken uit over deze vallei, toen ze zich plotseling realiseerden dat partitiegetallen een 'fractale structuur' bezitten. Afbeelding: © [Zach Kent, esciencecommons](#)

De term *fractal* werd bedacht door [Benoît Mandelbrot](#). Hij doelde hiermee op een figuur die oneindig gedetailleerd is en op elk niveau gelijk is aan de oorspronkelijke figuur: een fractal bestaat in feite uit oneindige gelijkenissen van zichzelf. Mandelbrot nam zelf als voorbeeld graag een bloemkool, die is opgebouwd uit roosjes die elk de vorm van een bloemkool hebben. De roosjes zijn op hun beurt wéér opgebouwd uit bloemkoolvormige delen.

De wandeling van Ono en Kent leidde tot een nieuwe klasse van fractals. De mysterieuze zin van Ramanujan kan verklaard worden met behulp van hun 'fractaltheorie'. Bovendien toonden de wiskundigen aan dat de deelbaarheidseigenschappen van partitiegetallen een 'fractale structuur' hebben voor elk priemgetal vanaf 5. De rijen zijn periodiek; ze herhalen zichzelf om de zoveel tijd. "Het is alsof je inzoomt op de Mandelbrotverzameling", zegt Ono, doelend op de beroemde 'kevervormige' fractal van Mandelbrot (zie het Youtube-filmpje hieronder).

De fractale structuur van de partitiefunctie

Het team van Ken Ono vond de volgende formule om het aantal partities van het getal $13^3n + 1007$ te berekenen:

$$p(13^3n + 1007) \equiv 6p(13n + 6) \pmod{13}.$$

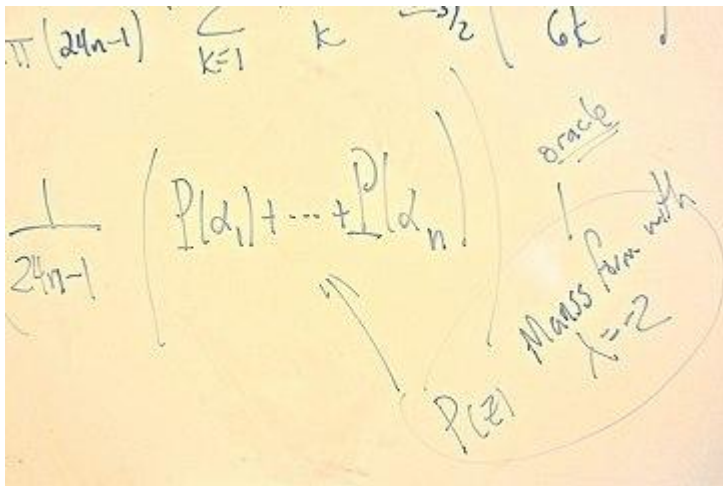
Soortgelijke formules vonden de wiskundigen wanneer in plaats van 13 een ander priemgetal gekozen wordt. Het 'fractale' zit hem erin dat de formule eindeloos kan worden uitgebreid naar hogere machten van het priemgetal:

$$p(13^4n + 27371) \equiv 45p(13^2n + 162) \pmod{13^2}.$$

Voor technische details: volg deze [link](#) (pdf).

Nog meer succes

Als of de gevonden fractale structuur nog niet genoeg was, hebben Ono en de zijnen nog een ander succes geboekt. Terwijl Ono en Bruinier in de auto aan het chatten waren, vastzittend in het verkeer op "Spaghetti Junction", hadden ze hun finale 'eureka moment'. Ze kwamen op een idee om de oneindig complexe structuur van de formule van Rademacher aanzienlijk te vereenvoudigen. Het lukte hen om een formule te vinden om partitiegetallen uit te rekenen, waarbij slechts eindig veel getallen opgeteld hoeven te worden. "We hebben een functie P gevonden, een soort 'magical oracle'", zegt Ono. "Ik kan nu een willekeurig getal nemen; je stopt hem in P en na een beetje rekenwerk heb ik het aantal partities van dat getal. De functie P gebruikt geen gruwelijke getallen met oneindig veel decimalen. Het is een eindige, algebraïsche formule. Het is dátgene, waar we al lang naar zochten."



Aantekeningen die leiden tot de uiteindelijke doorbraak over partitiegetallen Afbeelding: © [esciencecommons](#)

Het werk van Ono en zijn collega's resulteerde in twee publicaties die beschikbaar zijn op de site van het [American Institute of Mathematics](#):

- [Artikel van Folsom, Kent en Ono](#) (pdf)
- [Artikel van Bruinier en Ono](#) (pdf)

Zie ook:

- [New theories reveal the nature of numbers](#)
- [Finite formula found for partition numbers](#)
- [Partition Numbers Behave Like Fractals, Says Mathematician](#)